Généralités

EXERCICE 1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{x^3(x+2)} \qquad f_2 : x \mapsto \ln(\sin x) \qquad f_3 : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2-6x+5}{-x^2+2x+8}} \qquad f_4 : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt{-x^2+2x+8}}$$

EXERCICE 2. **[Vrai ou faux ?]** Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1) Si $f : D \to \mathbb{R}$ est paire et impaire, alors f s'annule sur D.
2) Il existe une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ paire et injective, avec $D \neq \varnothing$.
3) Si f est T-périodique, alors f est $2T$-périodique.
4) Toute fonction croissante est ou bien strictement croissante, ou bien constante.
5) La somme de deux fonctions monotones est une fonction monotone.
6) Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.
7) Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ est minorée sur $\mathbb{R}_+^\star$.
8) Si une fonction est positive et négative, alors elle s'annule en tout point.

EXERCICE 3. Que dire d'une fonction croissante et périodique ?

EXERCICE 4. **[Calcul de fonctions réciproques]**

1) Soit $f : x \mapsto 2x+5$. Démontrer que f est une bijection de D_f sur un ensemble à préciser. Déterminer sa réciproque f^{-1}.
2) Même question pour $f : x \mapsto x^3 - 2$.
3) Même question pour $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+3}$.

Dérivabilité et études de fonctions

EXERCICE 5. Déterminer les ensembles de définition, de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto (x^4+1)^5$
2) $x \mapsto |x+6|$
3) $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$
4) $x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$
5) $x \mapsto \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
6) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

EXERCICE 6. **Études de fonctions** On veillera à réduire l'intervalle d'étude.

1) Étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$.
2) Étudier la fonction $x \mapsto x\ln|x|$.
3) Étudier la fonction $x \mapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4) Étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$.

EXERCICE 7. Calculer, lorsqu'elles existent, les limites des fonctions suivantes, aux points indiqués.

1) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ en $+\infty$.
2) $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$ en 0^+.
3) $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.
4) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0^+ ;
5) $x \mapsto x^{-3}\ln(1+e^x)$ en $+\infty$.
6) $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^3}\right) \times \ln x$ en 0^+.

EXERCICE 8. Démontrer les propositions suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sin(x)| \leq |x|$.
2) $\forall x > -1 \qquad \ln(1+x) \leq x$

EXERCICE 9 ☆ . Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) \leq f(x)$$

Montrer que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$. *Indication : étudier* $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$.

(Nouvelles) fonctions usuelles

EXERCICE 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

EXERCICE 11. Résoudre les (in)équations suivantes, d'inconnue réelle x :

1. $2e^{3x} - 5e^{2x} + 2e^x \leqslant 0$
2. $\ln(3-x) + \ln(2) - 2\ln(x+1) \geqslant 0$.
3. $\operatorname{ch} x = 3$

EXERCICE 12. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes $\begin{cases} x+y & = 7 \\ \ln x + \ln y & = 10 \end{cases}$ et $\begin{cases} 8^x & = 10y \\ 2^x & = 5y \end{cases}$

EXERCICE 13.

1) Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note argsh sa bijection réciproque.
2) Montrer que la fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variations de la fonction argsh.
3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

EXERCICE 14. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \operatorname{sh}(kx)$.

EXERCICE 15. Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Et pour $x \in]-\infty, 0[$?

EXERCICE 16. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{9\pi}{4}\right)\right)$
3. $\cos(2\arccos x)$
4. $\cos(2\arcsin x)$
5. $\cos(2\arctan x)$
6. $\sin(2\arctan x)$
7. $\tan(2\arctan x)$
8. $\tan(\arcsin x)$

EXERCICE 17. Démontrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$. (Deux manières possibles !)

EXERCICE 18. Calculer $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

EXERCICE 19. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\arccos x = \arcsin(2x)$.

EXERCICE 20. Etudier la fonction $x \mapsto \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

EXERCICE 21 ☆ .

1) Peut-on trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\operatorname{ch}(x)) = e^x$?
2) Peut-on trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\operatorname{sh}(x)) = e^x$?